

Probability and Random Processes

ECS 315

Asst. Prof. Dr. Prapun Suksompong

prapun@siit.tu.ac.th

Expectation and Variance



Office Hours:

BKD 3601-7

Monday 14:00-16:00

Wednesday 14:40-16:00

Expectation and Variance

- The **expectation** (or **mean** or **expected value**) of a discrete random variable X is given by

$$\mathbb{E}X = \sum_x xp_X(x)$$

- The expected value of a function g of a RV X is given by

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

- The **variance** of a RV X is given by

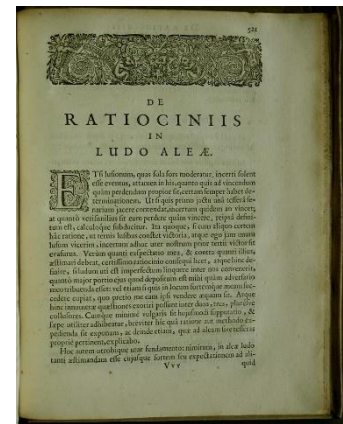
$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2$$

- The **standard deviation** of a RV X is given by

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Christiaan Huygens (1629-1695)

- Dutch astronomer
- In 1657, wrote the first treatise (textbook) on probability theory: “On Reasoning in Games of Chance”
 - Van Rekeningh in Spelen van Geluck
 - De ratiociniis in ludo aleae
 - <http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/huygens.htm>
- Interest sparked partly by the work of Pascal and Fermat.
- Originally introduced the concept of **expected value**.



Example

$$\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 1, \\ 1/4, & x = 2, \\ 1/8, & x \in \{3, 4\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
2 1 1 2 1 4 1 1 1 1
1 1 4 1 1 2 4 2 2 1
3 1 1 2 3 2 4 1 2 4
2 1 1 2 1 1 3 3 1 1
1 3 4 1 4 1 1 2 4 1
4 1 4 1 2 2 1 4 2 1
4 1 1 1 1 2 1 4 2 4
2 1 1 1 2 1 2 1 3 2
2 1 1 1 1 1 1 2 3 2
2 1 1 2 1 4 2 1 2 1
```

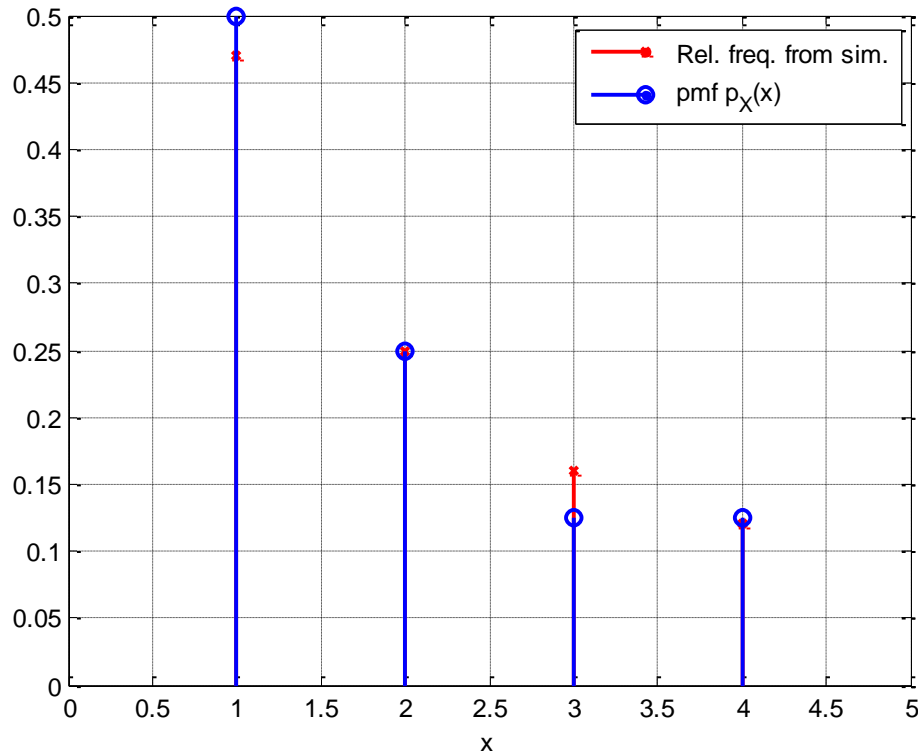


Example

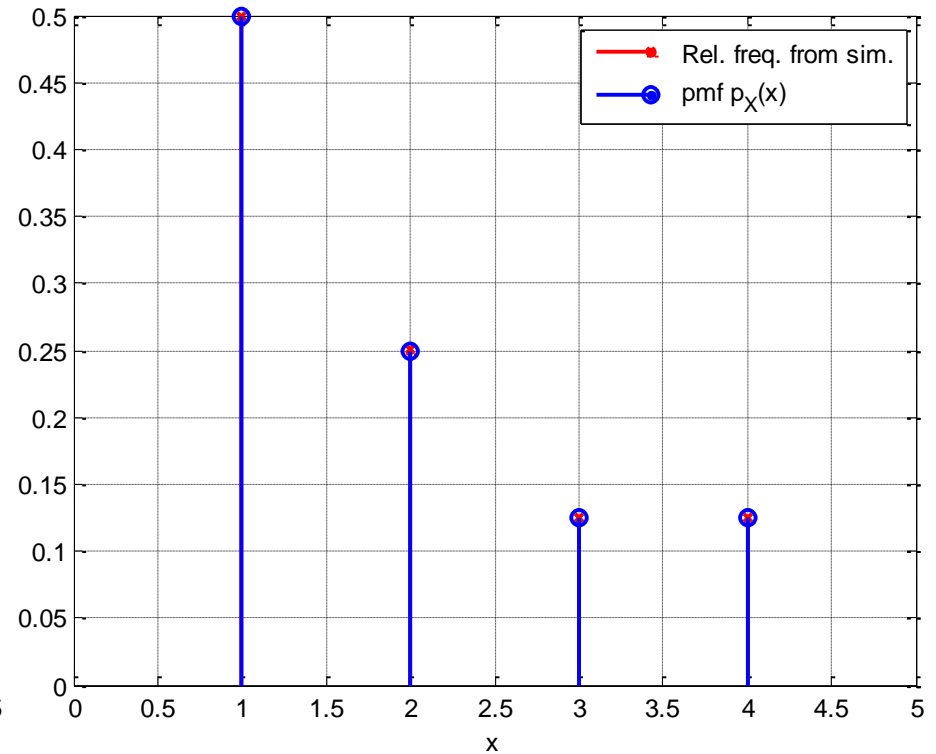
average ≈ 1.8739

$$EX = \frac{15}{8} = 1.875$$

$n = 100$



$n = 10^6$



Calculations of Expected Values



sum exp(-alpha) k * alpha^k / k! from k =0 to infinity



Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \exp(-\alpha) \alpha^k}{k!} = \alpha \quad \mathbb{E}X = \alpha$$

n! is the factorial function »

Poisson(α)

sum k * n!/(k!(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n



Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = n p \quad \mathbb{E}X = n p$$

n! is the factorial function »

Binomial(n,p)

Analyze the following games (1)

Game #1

Flip a fair coin.

H: You get ₦100

T: You lose ₦100

Game #2

Flip a fair coin.

H: You get ₦200

T: You lose ₦100

Analyze the following games (2)

Game #3

Flip an *unfair* coin with $P(\{H\}) = 10^{-6}$

H: You get ₦2,000,000

T: You lose ₦0

Game #4

Pay ₦50 to play the game.

Flip an *unfair* coin with $P(\{H\}) = 10^{-6}$

H: You get ₦2,000,000

T: You lose ₦0

Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

เงื่อนไขเงินรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล
(ใช้ตั้งแต่งวดวันที่ 1 พฤศจิกายน 2552 เป็นต้นไป)

สลาก 1 ชุด มี 1 ล้านฉบับๆ ละ 40 บาท

ถ้าจำหน่ายหมด กำหนดเงินรางวัลต่อชุด ดังนี้

| | | | |
|----------------------------------|----|---------------|--------------------|
| รางวัลที่ หนึ่ง | มี | 1 รางวัล | ๆ ละ 2,000,000 บาท |
| รางวัลที่ สอง | มี | 5 รางวัล | ๆ ละ 100,000 บาท |
| รางวัลที่ สาม | มี | 10 รางวัล | ๆ ละ 40,000 บาท |
| รางวัลที่ สี่ | มี | 50 รางวัล | ๆ ละ 20,000 บาท |
| รางวัลที่ ห้า | มี | 100 รางวัล | ๆ ละ 10,000 บาท |
| รางวัลข้างเคียงรางวัลที่หนึ่ง | มี | 2 รางวัล | ๆ ละ 50,000 บาท |
| รางวัลเลขท้าย 3 ตัว เสีย 4 ครั้ง | มี | 4,000 รางวัล | ๆ ละ 2,000 บาท |
| รางวัลเลขท้าย 2 ตัว เสีย 1 ครั้ง | มี | 10,000 รางวัล | ๆ ละ 1,000 บาท |


สลาก 1 ชุด มี 14,168 รางวัล เป็นเงิน 23,000,000 บาท

รางวัลที่ 1 พิเศษ มี 2 รางวัล แบ่งเป็น 2 กลุ่ม

กลุ่มที่ 1 เท่ากับ จำนวนชุดที่ 01 ถึงชุดที่ 30 ที่จำหน่ายในแต่ละงวด x 1,000,000 บาท และยังมีสิทธิได้รับเงินรางวัลอื่นอีก ตามเงื่อนไขเงินรางวัล

กลุ่มที่ 2 เท่ากับ จำนวนชุดที่ 51 ถึงชุดที่ 70 ที่จำหน่ายในแต่ละงวด x 1,000,000 บาท และยังมีสิทธิได้รับเงินรางวัลอื่นอีก ตามเงื่อนไขเงินรางวัล



| | | | | | | | | | |
|--|---|---------------------|---------------|---------|---|---------------|----------------------------------|--------------------|------------|
|  สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ช่วยราษฎร์ เสริมรัฐ ยืนหยัดคู่ศิริม ผลการออกรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล งวดที่ 16 ประจำวันที่ 16 สิงหาคม พ.ศ. 2555 เป็นงวดที่ 63 สลากกาชาดพิเศษสภาคชาดไทย เป็นงวดที่ 48 สลากบำรุงการกุศลงวดพิเศษ ศิริราช เป็นงวดที่ 38 สลากบำรุงการกุศลงวดพิเศษ รามาธิบดี | | | | | | | | | |
| พิมพ์แจก | | | | | ตรวจรางวัลใน เว็บไซต์ได้ที่ โทร. 1900-1900-10 0-2629-1000 | | ตรวจผลทาง Internet www.glo.or.th | | |
| รางวัลที่ 1 | | | เลขท้าย 3 ตัว | | | เลขท้าย 2 ตัว | | | |
| สลากกินแบ่งรัฐบาล รางวัลละ 2,000,000 บาท | | | | | รางวัลละ 2,000 บาท | | | รางวัลละ 1,000 บาท | |
| สลากกาชาดพิเศษและสลากการกุศล รางวัลละ 3,000,000 บาท | | | | | | | | | |
| 683877 | | | | | 032 | 612 | 730 | 775 | 2 8 |
| รางวัลที่ 1 พิเศษ | สลากกินแบ่งรัฐบาล กลุ่มที่ 1 รางวัลละ 30 ล้านบาท ชุดที่ | 20 | | หมายเลข | 683877 | | รางวัลละ | | |
| | สลากกินแบ่งรัฐบาล กลุ่มที่ 2 รางวัลละ 20 ล้านบาท ชุดที่ | 62 | | หมายเลข | 683877 | | รางวัลละ | | |
| รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1 | | รางวัลละ 50,000 บาท | | | รางวัลที่ 2 | | รางวัลละ 100,000 บาท | | |
| 6 8 3 8 7 6 | | 6 8 3 8 7 8 | | | 193867 | 221117 | 604811 | 884831 | 980179 |
| รางวัลที่ 3 | | รางวัลละ 40,000 บาท | | | | | | | |
| 011403 | 073342 | 115070 | 258151 | 271347 | 301472 | 304622 | 558992 | 884665 | 897294 |
| รางวัลที่ 4 | | รางวัลละ 20,000 บาท | | | | | | | |
| 032967 | 138576 | 244415 | 294466 | 413340 | 489333 | 587378 | 727764 | 869215 | 937745 |
| 063102 | 146256 | 248433 | 341630 | 429131 | 501047 | 602455 | 751560 | 890107 | 939311 |
| 089080 | 214670 | 250238 | 349327 | 459303 | 550308 | 608005 | 756100 | 890543 | 955614 |
| 108256 | 219309 | 251583 | 369753 | 471331 | 568930 | 614980 | 784592 | 899953 | 992948 |
| 136658 | 239439 | 260506 | 392185 | 487692 | 579567 | 637739 | 821743 | 900384 | 996269 |
| รางวัลที่ 5 | | รางวัลละ 10,000 บาท | | | | | | | |
| 020184 | 106799 | 169191 | 281684 | 404802 | 536738 | 627081 | 713064 | 807726 | 913963 |
| 026416 | 118454 | 219308 | 320426 | 410730 | 537552 | 637029 | 723025 | 808419 | 953376 |
| 038792 | 119505 | 221805 | 333524 | 413290 | 549048 | 638158 | 731046 | 820575 | 965902 |
| 045281 | 129862 | 223867 | 337108 | 460092 | 555644 | 657335 | 736670 | 826723 | 974542 |
| 046893 | 130225 | 236534 | 340069 | 460709 | 558116 | 659391 | 737270 | 827400 | 975085 |
| 056328 | 138767 | 247702 | 343903 | 480080 | 571304 | 659776 | 773972 | 845269 | 980457 |
| 074613 | 141161 | 264348 | 363957 | 487653 | 575135 | 662978 | 782542 | 855606 | 980807 |
| 096773 | 154062 | 267268 | 371975 | 490633 | 601996 | 672696 | 783096 | 866715 | 985181 |
| 097349 | 160338 | 267500 | 393699 | 495203 | 611947 | 678287 | 803491 | 867061 | 990506 |
| 102320 | 166180 | 271282 | 404326 | 523074 | 617576 | 708080 | 804956 | 901106 | 990972 |

Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

ตารางที่ 4 การคำนวณกำไรขาดหวังของสลากกินแบ่งรัฐบาล

| ชื่อรางวัล | จำนวนรางวัล | กำไร(1) =เงินรางวัล-ค่าซื้อสลาก ¹ | โอกาสที่จะถูกรางวัล (2) |
|---------------------------------|-------------|--|-------------------------|
| รางวัลที่ 1 ชุดใหญ่ 30 ล้าน บาท | 1 | 30 ล้าน - 40 บาท | 0.00000333 % |
| รางวัลที่ 1 ชุดใหญ่ 16 ล้าน บาท | 1 | 16 ล้าน - 40 บาท | 0.00000625 % |
| รางวัลที่ 1 | 46 | 2 ล้าน - 40 บาท | 0.0001% |
| รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1 | 92 | 5 หมื่น - 40 บาท | 0.0002% |
| รางวัลที่ 2 | 230 | 1 แสน - 40 บาท | 0.0005% |
| รางวัลที่ 3 | 460 | 4 หมื่น - 40 บาท | 0.001% |
| รางวัลที่ 4 | 2,300 | 2 หมื่น - 40 บาท | 0.005% |
| รางวัลที่ 5 | 4,600 | 1 หมื่น - 40 บาท | 0.01% |
| เลขท้าย 3 ตัว | 184,000 | 2 พัน - 40 บาท | 0.4% |
| เลขท้าย 2 ตัว | 460,000 | 1 พัน - 40 บาท | 1.0% |
| สลากที่ไม่ถูกรางวัลใดๆ | - | -40 บาท | 98.58% |

¹ ไม่ได้รวมภาษีหัก ณ ที่จ่ายไม่เกินร้อยละ 1 ของเงินรางวัล เบื้อง่ายต่อการคำนวณ

Expected Profit = -16



Assumption

[<http://money.sanook.com/204469/>]

[<http://www.nationtv.tv/main/content/lifestyle/378418937/>]

นายพิภพ ปานแถม รองนายกเทศมนตรีเทศบาลเมืองคลองหลวง นำสื่อ
ตเตอร์จำนวนมากติดฝาผนังบ้านของตนที่ อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี

“ตอหวย” ปลง นำหวยมาทำ “วอลเปเปอร์บ้าน”



Can only press once

**INSTANT
\$1 MILLION**



**50% CHANCE OF
\$100 MILLION**



“Similar” Example



ฉันเหมือนคนที่มี**เสือใส่** แต่ยังไม่พอใจกับที่ฉันมี
เพราะแค่เพียงได้**เจอเสือใหม่** อย่างที่ฉันพอใจอยาก**จะริบคว่ำ**
ใครก็เตือนว่าไม่คุ้มกับสิ่งที่ฉันทิ้งไป เพื่อสิ่งที่ฉันยังไม่ได้มา
ใครก็เตือนอย่ารีบร้อนจะ**เสียด**ทำไมนะ แต่มันก็ยังถลำไปหมดทั้งใจ

ฉันอุตสาห์**ไม่รักเขาเพื่อที่จะรักเธอ**
ยอมทุ่มเทหมดแล้วให้เธอ แล้วเธอก็ทิ้งไป
เสียค่าแล้วยังต้องเสียใจ เธอสอนฉันให้เข้าใจ
การลงทุน**เสียงเหลือเกิน**



Computation of $\mathbb{E}[X^2]$



sum exp(-alpha) k^2 * alpha^k / k! from k =0 to infinity



Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \exp(-\alpha) \alpha^k}{k!} = \alpha (\alpha + 1)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \alpha + \alpha^2$$

n! is the factorial function >

Poisson(α)

sum k^2 * n!/(k!(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n



Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2 n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = p (n^2 p - n p + n)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = np(1-p) + (np)^2$$

n! is the factorial function >

Binomial(n,p)